МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

ФГБОУ ВПО «ОРЛОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Факультет физико-математический

Кафедра геометрии и методики преподавания математики

**Теория вероятностей и элементы математической статистики**

Элективный курс для 10-11 класса

студента 1 курса

***Русакова Ильи Александровича***

Научный руководитель:

доктор педагогических наук,

профессор Т.К. Авдеева

**Орел-2012**

Современной России нужны люди, способные принимать нестандартные решения, умеющие творчески мыслить, хорошо ориентироваться в обычных житейских ситуациях и повседневной хозяйственной и производственной деятельности.

Введение элементов статистики и теории вероятностей в содержание математического образования является одним из важнейших аспектов модернизации содержания образования, так как роль этих знаний в современном мире повышается.

Цель курса «Математическая статистика и теория вероятностей» состоит в ознакомлении учащихся со случайными величинами и числами, столь необычными для школьников и естественными в повседневной жизни; развитие в них стохастического аспекта представлений об окружающем нас мире.

Задачи курса:

* обеспечить условия для развития личности школьника с учетом его возрастных особенностей;
* развитие творческих способностей и дарований;
* формировать устойчивый интерес к изучению математики;
* способствовать формированию качеств самостоятельности и самоактуализации.

В процессе обучения учащиеся узнают:

* место статистики в изучении окружающего мира;
* природу и механизм возникновения случайных величин;
* основные понятия математической статистики;
* суть критериев статистической проверки гипотез.

При обучении статистике можно использовать стохастические игры, статистические исследования, эксперименты со случайными исходами, мысленные статистические эксперименты и моделирование.

В процессе изучения материала используются как традиционные формы обучения, так и самообразование, саморазвитие учащихся посредством самостоятельной работы с информационным и методическим материалом.

Предполагаются следующие формы организации обучения:

* индивидуальная, групповая, коллективная;
* взаимное обучение, самообучение, саморазвитие.

Занятия включают в себя теоретическую и практическую части, в зависимости от целесообразности – лекции, консультации, самостоятельную работу, творческую проектную работу и т.п.

Эффективность обучения отслеживается следующими формами контроля:

- самостоятельная работа;

- срезы знаний, умений в процессе обучения;

- итоговый контроль.

Показателем эффективности обучения следует считать повышающийся интерес к математике, творческую активность и результативность учащихся.

Динамика интереса отслеживается с помощью анкетирования на первом и последнем занятиях, собеседования в процессе работы после выполнения каждого вида обязательных работ.

Итоговый контроль предусматривает:

I раздел – творческая подборка вероятностных задач и их защита.

II раздел – собеседование.

III раздел - написание и защита рефератов.

Данный элективный курс «Математическая статистика и теория вероятностей» составлен на основе программы для школ с углубленным изучением математики, автор Н.Я. Виленкин. Он предназначен для учащихся 10–11 классов и рассчитан на 21 часов.

**Учебно-тематическое планирование материала**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № п/п | **Наименование разделов и тем** | **Количество****часов** |
|  1 234567 123456 | **Раздел I. Статистика и вероятность (13 ч.).**Табличное и графическое представление информации.Решение комбинаторных задач.Формулы для числа перестановок, размещений, сочетаний.Вероятностное пространство.Схема Бернулли.Вероятность случайных событий.Вероятность и статистическая частота наступления события.**Раздел II. Основные понятия математической статистики (8 ч.).**Случайные величины и их природа.Законы распределения случайных величин.Математическое ожидание и его свойстваДисперсия и среднее квадратическое отклонениеВыборкиИтоговое занятие. | 2221231121121 |

# Раздел I. Статистика и вероятность.

## Урок 1-2. Табличное и графическое представление информации.

Результаты сводки и группировки материалов наблюдения представляют в виде статистических таблиц. По внешнему виду статистическая таблица представляет собой ряд пересекающихся горизонтальных и вертикальных линий, образующих по горизонтали строки, а по вертикали – графы (столбцы, колонки), которые в совокупности составляют как бы скелет таблицы. В образовавшиеся внутри таблицы клетки записывается соответствующая информация. Составленную таблицу, но не заполненную цифрами принято называть макетом таблицы, в котором мысленно определяются в деталях цель обследования, объем разработки материалов сводки. Статистическая таблица имеет свое подлежащее и сказуемое. Подлежащее таблицы показывает, о каком явлении идет речь в таблице, и представляет собой группы и подгруппы, которые характеризуются рядом показателей. Сказуемым таблицы называются показатели, с помощью которых изучается объект, т.е. подлежащее таблицы. В основном в сказуемом отражаются числовые значения и характеристики изучаемого явления. Составленная и оформленная статистическая таблица должна иметь общий заголовок, боковые и верхние заголовки. Общий заголовок обычно располагается над таблицей и выражает ее основное содержание. Помещенные, как правило, слева боковые заголовки раскрывают содержание строк подлежащего, а верхние заголовки – вертикальных граф (сказуемого таблицы). В зависимости от построения подлежащего таблицы делятся на три вида: перечневые, групповые и комбинационные. Таблицы, подлежащее которых содержит перечень единиц изучаемой совокупности, называются перечневыми. Групповые таблицы дают более информативный материал для анализа изучаемых явлений благодаря образованным в их подлежащем группам по существенному признаку или выявлению связи между рядом показателей. Комбинационная таблица устанавливает взаимное действие на результативные признаки (показатели) и существующую связь между факторами группировки. Правила построения и оформления таблиц:

* По возможности таблицу следует составлять небольшой по размеру, легко обозримой;
* Общий заголовок таблицы должен кратко выражать ее основное содержание. В нем обычно указывается время, территория, к которым относятся данные, единица измерения, если она одна для всей таблицы;
* Обычно строки подлежащего и графы сказуемого располагаются в виде частных слагаемых с последующим итогом по каждому из них;
* Для удобства анализа таблицы при большом числе строк подлежащего и граф сказуемого возникает потребность в нумерации тех из них, которые заполняются данными. Подлежащее и единицы измерения обычно обозначаются буквами;
* Использование условных обозначений при заполнении таблиц;
* Одинаковая степень точности, обязательная для всех чисел.

Статистический график представляет собой чертеж, на котором при помощи условных геометрических фигур (линий, точек или других символических знаков) изображаются статистические данные. В результате этого достигается наглядная характеристика изучаемой статистикой совокупности. Графический метод в статистике является продолжением и дополнением табличного метода. То, что при чтении таблицы может остаться незамеченным, обнаруживается на графике. При графическом изображении статистических данных становится более выразительной сравнительная характеристика изучаемых показателей, отчетливее проявляется тенденция развития изучаемого явления, лучше видны основные взаимосвязи. Основные элементы статистического графика:

* поле графика – место, на котором он выполняется;
* графический образ – это символические знаки, с помощью которых изображаются статистические данные (линии, точки, плоские геометрические фигуры, объемные геометрические фигуры;
* пространственные ориентиры – определяют размещение графических образов на поле графика, они задаются координатной сеткой или контурными линиями и делят поле графика на части, соответствующие значениям изучаемых показателей;
* масштабные ориентиры – придают графическим образам количественную значимость, которая передается с помощью системы масштабных шкал; масштаб графика – это мера перевода численной величины в графическую; чем длиннее отрезок линии, принятой за численную единицу, тем крупнее масштаб;
* масштабная шкала – линия, отдельный точки которой читаются как определенные числа (различают в масштабной шкале: линию – носитель информации в виде черточек, цифровые обозначения чисел; также различают – равномерные и неравномерные шкалы);
* экспликация графика – это пояснение его содержания; заголовок графика - в краткой и четкой форме поясняет основное содержание изображаемых данных.

Статистические графики классифицируются: по способу построения (диаграммы, картограммы и картодиаграммы); форме применяемых графических образов (точечные, линейные, плоскостные и фигурные); характеру решаемых задач (классифицируются по их целевому применению в статистическом изучении коммерческой деятельности на рынке товаров и услуг). Виды статистических графиков: ряд распределения, структура статистической совокупности, ряд динамики, показатель связи, показатель выполнения задания.

Полигон частот — один из способов графического представления плотности вероятности случайной величины. Представляет собой ломаную, соединяющую точки, соответствующие срединным значениям интервалов группировки и частотам этих интервалов.



Гистогра́мма (от др.-греч. ἱστός — столб + γράμμα — черта, буква, написание) — способ графического представления табличных данных.

Количественные соотношения некоторого показателя представлены в виде прямоугольников, площади которых пропорциональны. Чаще всего для удобства восприятия ширину прямоугольников берут одинаковую, при этом их высота определяет соотношения отображаемого параметра.

Таким образом, гистограмма представляет собой графическое изображение зависимости частоты попадания элементов выборки от соответствующего интервала группировки.

## Урок 3-4. Решение комбинаторных задач.

Пусть множество A состоит из p элементов, а множество B состоит из q элементов. Составим новое множество , состоящее из всех упорядоченных пар (a, b), где

Множество называется декартовым произведением множеств A и B.

Очевидно, что множество  содержит pq элементов.

Правило произведения: декартово произведение множеств A и B, содержащих p и q элементов соответственно, содержит pq элементов.

Для нас будет удобна следующая формулировка правила произведения.

Пусть некоторый объект a можно выбрать p способами, а объект b – q способами. Тогда количество способов, которыми можно выбрать упорядоченную пару (a, b), равно pq.

Правило произведения легко обобщается на большее число объектов.

*Пример 1*. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску чёрную и белую ладью так, чтобы они не били друг друга?

*Решение*. Чёрную ладью можно поставить на шахматную доску p = 64 различными способами. Независимо от выбора поля чёрная ладья бьёт 15 полей, поэтому для второй ладьи остаётся 64 – 15 = 49 полей, то есть q = 49. Всего число возможных способов, по правилу произведения, равно pq = 64 ∙ 49 = 3136. *Ответ: 3136*.

*Пример 2.*  Сколько решений в натуральных числах имеет система?

*Решение*. Число 10 можно представить в виде суммы двух слагаемых девятью различными способами: 1 + 9, 2 + 8, ..., 4 + 6, 5 + 5, 6 + 4, ..., 9 + 1. Заметим, что решения (a, b) и (b, a)мы считаем различными, и потому нам важен порядок, в каком число 10 представлено в виде суммы. Аналогично, число 5 можно представить в виде суммы двух натуральных слагаемых четырьмя различными способами. Каждому решению (x, y) можно выбрать в пару четыре решения (u, v). По правилу произведения, количество решений системы равно 9 ∙ 4 = 36. *Ответ: 36*.

Пусть снова множество A состоит из p элементов, а множество B – из q элементов. Предположим, что множества A и B не пересекаются. В этом случае множество  состоит из p + q элементов.

Это соображение и носит название правила суммы. Обычно в задачах применяют оба правила вместе.

*Пример 3*. Встретились 6 друзей, и каждый пожал руку каждому. Сколько всего было рукопожатий?

*Решение.* Каждый пожал руку каждому, то есть каждый человек сделал 5 рукопожатий. Но общее количество рукопожатий получается по правилу суммы: . Учтём теперь то, что каждое рукопожатие мы посчитали дважды, и получим в результате 15 рукопожатий. *Ответ. 15 рукопожатий*.

Задачи.

1. В 5А классе во вторник 5 уроков: физкультура, русский язык, литература, обществознание и математика. Сколько можно составить вариантов расписания на день, зная точно, что математика – последний урок?
2. Несколько стран решили использовать для своего государственного флага символику в виде трех горизонтальных полос разной ширины, разных цветов – белый, синий, красный. Сколько стран могут использовать такую символику при условии, что у каждой страны свой флаг?
3. Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную из слова КОНВЕРТ?
4. Сколько разных слов (не обязательно осмысленных) можно получить, переставляя буквы слов: ВАЛЬС, МАМА?

## Урок 5-6. Формулы для числа перестановок, размещений, сочетаний.

Пусть задано некоторое конечное множество из n различных элементов. Пусть из числа его элементов выбраны k различных штук (k ≤ n). Говорят, что произведена выборка объёма k. Если важен порядок, в котором произведена выборка элементов, то говорят об упорядоченной выборке, если порядок не важен, то о неупорядоченной.

Упорядоченная выборка объёма k из множества, состоящего из n элементов, (k ≤ n) называется размещением из n элементов по k. Количество размещений обозначается .

Размещение из n элементов по n называется перестановкой из n элементов. Количество перестановок обозначается .

Другими словами, . Выведем формулу для числа . Первый элемент выборки можно выбрать n различными способами, второй n-1 способом, ..., k-й – n-(k-1)способом. Значит, k элементов можно выбрать

Количество размещений из n элементов по k:

В частности, количество перестановок из n элементов:

*Пример 1*. Вычислить

*Решение*.

Вычислять факториалы от больших чисел не очень удобно. Для больших n можно использовать оценочную формулу, предложенную шотландским математиком Джеймсом Стирлингом.

При больших n выражение n! можно приближенно вычислить по формуле:

При n = 10 погрешность при вычислении факториала с помощью этой формулы составляет менее 1 %, а при n = 100 – меньше 1/10 процента.

Вернемся к формуле . Из неё следует, что . В подобных ситуациях полагают, что 0! = 1, и это логично: единственный способ переставить 0 объектов – это ничего не делать.

*Пример 2*. Сколько семизначных чисел, кратных 5, можно составить из цифр при условии, что цифры в записи числа не повторяются?

*Решение*. Последняя цифра искомого числа должна быть 0 или 5. В первом случае остальные шесть цифр можно выбирать из множества {1, 2, 3, ..., 9}, и число вариантов равно . Пусть теперь число оканчивается цифрой 5. Тогда в качестве первой цифры можно взять любую из цифр 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9. Цифры со второй по шестую можно выбрать способами. Значит, всего таких семизначных цифр существует . *Ответ: 114240*

В предыдущем примере цифры в числе не должны были повторяться. Не менее часто, однако, встречаются задачи, в которых элементы в выборке могут повторяться. Подобные выборки называются размещениями с повторениями и обозначаются .

Найдем число . На первое место можно выбрать элемент n способами, на второе – также n способами, и так далее. Если количество мест равно k, то по правилу количество различных выборок равно

Количество размещений с повторениями обозначается символом и вычисляется по формуле

*Пример 3*. Сколько различных пятибуквенных «слов» можно составить из 26 букв латинского алфавита?

*Решение*. По формуле , где n=26, k=5, получаем:

*Пример 4*. У Васи есть две одинаковых копейки, один десятицентовик, три одинаковых пенса и три одинаковых лиры. Сколькими способами Вася может поместить монеты в своем альбоме, если количество мест в альбоме в точности равно количеству монет?

*Решение*. При расстановке монет в альбоме важен порядок следования монет – значит, речь идет о количестве перестановок. Всего монет 9, и общее количество перестановок равно 9!. Однако если мы переставим местами две одинаковых копейки, то набор от этого не изменится. Значит, ответ нужно поделить на 2. Точно так же не изменится набор и в том случае, если переставить друг с другом пенсы или лиры. Количество перестановок 3 пенсов равно 3!, лир – также 3!. Десятицентовик у Васи всего один, и количество перестановок для него равно 1!, но для завершённости формулы учтём и его. Итак, количество способов, которыми можно расставить монеты в альбоме, равно

Можно сформулировать общее правило.

Количество перестановок из элементов, среди которых имеется одинаковых элементов первого сорта, одинаковых элементов второго сорта, одинаковых элементов k-го сорта, называется количеством перестановок с повторениями, обозначается символом и вычисляется по формуле:

Допустим теперь, что нас не интересует порядок, в котором идут выбранные элементы. Например, нужно из десяти человек выбрать троих дежурных. Такая операция называется неупорядоченной выборкой, или сочетанием, в отличие от упорядоченной выборки – размещений.

Всякая неупорядоченная выборка объёма k из множества, состоящего из n элементов, () называется сочетанием из n элементов по k. Количество сочетаний обозначается и вычисляется по формуле

Формулу для можно получить из следующих соображений.

Из любого набора, содержащего k элементов, можно получить k! перестановок. Поэтому упорядоченных выборок объёма k существует

штук. Значит,

*Пример 1*. Для проведения письменного экзамена нужно составить 3 варианта по 5 задач в каждом. Сколькими способами можно разбить 15 задач на 3 варианта?

*Решение*. Задачи первого варианта можно выбрать способами. После этого останется 10 задач, следовательно, второй вариант можно составить способами. Для третьего варианта задачи можно выбрать способом. По правилу произведения получаем, что число способов равно . Однако нам всё равно, какой вариант будет первым, какой – вторым, а какой – третьим. Потому найденное число нужно разделить на число перестановок из трёх элементов, то есть на 3!. Окончательно получаем, что число способов равно способов. *Ответ: 126126*.

Пример 2. Сколькими способами можно разместить 10 различных шаров по 4 ящикам так, чтобы в первом ящике оказалось 2 шара, во втором – 3, в третьем – 3 и в четвёртом снова два?

Решение. Пусть в первый ящик попадет шаров, во второй – , в третий – шаров, а в четвёртый – . Тогда количество способов выборки в первый ящик из шаров определяется числом ,количество способов выборки во второй ящик шаров из оставшихся – числом , для k-го ящика то же число будет равно . Ответ найдётся по правилу произведения. В нашем случае

Для числа сочетаний справедливы некоторые тождества, в частности:

Как и в случае с размещениями, существует понятие числа сочетаний с повторениями.

Если из множества, содержащего n элементов, выбирается поочередно m элементов, причём выбранный элемент каждый раз возвращается обратно, то количество способов произвести неупорядоченную выборку – число сочетаний с повторениями – составляет

## Урок 7. Вероятностное пространство, элементарный исход, событие

Дискретным вероятностным пространством называется пара из некоторого (не более, чем счетного) множества и функции ( называется множеством элементарных исходов, - элементарным исходом), такая, что . называют дискретной вероятностной мерой, или дискретной плотностью вероятности, - вероятность элементарного исхода.

Множество называется событием.

, то есть вероятность события равна сумме вероятностей входящих в него элементарных исходов.

Примеры вероятностных пространств.

1. Честная монета.

Множество исходов , где 0 - выпадает орел, 1 - выпадает решка. . Рассмотрим все возможные события и их вероятности для этого пространства.

Действительно, вероятность того, что выпадет орел или решка, равна единице

1. Нечестная монета.

Множество исходов здесь такое же, как и в предыдущем пространстве, однако , где .

1. Игральная кость.

Множество исходов . Рассмотрим некоторые события этого пространства.

. Вероятность выпадения одного из трех чисел - 1, 2, 3 равна одной второй.

. Числа 2 или 4 выпадут с вероятностью одна треть.

1. Колода карт.

*.* Здесь i - масть, j - достоинство карты.

Вероятность элементарного исхода этого пространства .

## Урок 8-9. Схема Бернулли

Схема Бернулли — это когда производится n однотипных независимых опытов, в каждом из которых может появиться интересующее нас событие A, причем известна вероятность этого события P(A) = p. Требуется определить вероятность того, что при проведении n испытаний событие A появится ровно k раз.

Задачи, которые решаются по схеме Бернулли, чрезвычайно разнообразны: от простеньких (типа «найдите вероятность, что стрелок попадет 1 раз из 10») до весьма суровых (например, задачи на проценты или игральные карты). В реальности эта схема часто применяется для решения задач, связанных с контролем качества продукции и надежности различных механизмов, все характеристики которых должны быть известны до начала работы.

Вернемся к определению. Поскольку речь идет о независимых испытаниях, и в каждом опыте вероятность события A одинакова, возможны лишь два исхода:

A — появление события A с вероятностью p;

«не А» — событие А не появилось, что происходит с вероятностью q = 1 − p.

Важнейшее условие, без которого схема Бернулли теряет смысл — это постоянство. Сколько бы опытов мы ни проводили, нас интересует одно и то же событие A, которое возникает с одной и той же вероятностью p.

Между прочим, далеко не все задачи в теории вероятностей сводятся к постоянным условиям. Даже такое нехитрое дело, как вынимание разноцветных шаров из ящика, не является опытом с постоянными условиями. Вынули очередной шар — соотношение цветов в ящике изменилось. Следовательно, изменились и вероятности.

Если же условия постоянны, можно точно определить вероятность того, что событие A произойдет ровно k раз из n возможных. Сформулируем этот факт в виде теоремы:

**Теорема Бернулли**. Пусть вероятность появления события A в каждом опыте постоянна и равна р. Тогда вероятность того, что в n независимых испытаниях событие A появится ровно k раз, рассчитывается по формуле:

Эта формула так и называется: формула Бернулли. Интересно заметить, что задачи, приведенные ниже, вполне решаются без использования этой формулы. Например, можно применить формулы сложения вероятностей. Однако объем вычислений будет просто нереальным.

*Задача*. Вероятность выпуска бракованного изделия на станке равна 0,2. Определить вероятность того, что в партии из десяти выпущенных на данном станке деталей ровно k будут без брака. Решить задачу для k = 0, 1, 10.

*Решение*. По условию, нас интересует событие A выпуска изделий без брака, которое случается каждый раз с вероятностью p = 1 − 0,2 = 0,8. Нужно определить вероятность того, что это событие произойдет k раз. Событию A противопоставляется событие «не A», т.е. выпуск бракованного изделия. Таким образом, имеем: n = 10; p = 0,8; q = 0,2.

Итак, находим вероятность того, что в партии все детали бракованные (k = 0), что только одна деталь без брака (k = 1), и что бракованных деталей нет вообще (k = 10):



Ответ:

*Задача*. Монету бросают 6 раз. Выпадение герба и решки равновероятно. Найти вероятность того, что: герб выпадет три раза; герб выпадет один раз; герб выпадет не менее двух раз.

*Решение*. Итак, нас интересует событие A, когда выпадает герб. Вероятность этого события равна p = 0,5. Событию A противопоставляется событие «не A», когда выпадает решка, что случается с вероятностью q = 1 − 0,5 = 0,5. Нужно определить вероятность того, что герб выпадет k раз.

Таким образом, имеем: n = 6; p = 0,5; q = 0,5.

Определим вероятность того, что герб выпал три раза, т.е. k = 3:



Теперь определим вероятность того, что герб выпал только один раз, т.е. k = 1:



Осталось определить, с какой вероятностью герб выпадет не менее двух раз. Основная загвоздка — во фразе «не менее». Получается, что нас устроит любое k, кроме 0 и 1, т.е. надо найти значение суммы .

Заметим, что эта сумма также равна (1 − P6(0) − P6(1)), т.е. достаточно из всех возможных вариантов «вырезать» те, когда герб выпал 1 раз (k = 1) или не выпал вообще (k = 0). Поскольку P6(1) нам уже известно, осталось найти P6(0):



Ответ:

*Задача*. Вероятность того, что телевизор имеет скрытые дефекты, равна 0,2. На склад поступило 20 телевизоров. Какое событие вероятнее: что в этой партии имеется два телевизора со скрытыми дефектами или три?

*Решение*. Интересующее событие A — наличие скрытого дефекта. Всего телевизоров n = 20, вероятность скрытого дефекта p = 0,2. Соответственно, вероятность получить телевизор без скрытого дефекта равна q = 1 − 0,2 = 0,8.

Получаем стартовые условия для схемы Бернулли: n = 20; p = 0,2; q = 0,8.

Найдем вероятность получить два «дефектных» телевизора (k = 2) и три (k = 3):



Очевидно, P20(3) > P20(2), т.е. вероятность получить три телевизора со скрытыми дефектами больше вероятности получить только два таких телевизора. Причем, разница неслабая.

Ответ:

Задачи:

1. Вероятность того, что расход электроэнергии в продолжение одних суток не превысит норму, равна Р=0,75. Найти вероятность того, что в ближайшие 6 суток расход электроэнергии в течение 4 суток не превысит норму.
2. Два равносильных шахматиста играют в шахматы. Что более вероятно: выиграть две партии из четырех или три из шести?
3. Монету бросают 5 раз. Найти вероятность того, что орёл выпадет не менее 2 раз.

## Урок 10-12. Вероятность случайных событий

Все задачи курса теории вероятностей связаны с многократным повторением испытаний и фиксацией результата испытаний – событий. Рассмотрим различные события на примере бросков игрального кубика – A. Будем обозначать тот факт, что на кубике выпало некоторое число от 1 до 6, буквой A с индексом, обозначающим выпавшее число. Так,A3 обозначает, что при броске кубика A выпало число 3.

В нашем случае события A1, A2, A3, A4, A5, A6 образуют множество элементарных событий. Для них верно .

Для бросков кубика класс элементарных событий может быть выбран и так: событие C1 заключается в том, что выпала грань с чётным количеством очков, C2 – с нечётным. Тогда p (C1) + p (C2) = 1. А вот класс, состоящий из событий «выпало чётное количество очков», «выпала единица», «выпала двойка», «выпала тройка», не является элементарным, хотя для них . Это связано с тем, что событие «выпало 2» относится сразу к двум событиям этого класса: «выпало чётное количество очков» и «выпала двойка».

К классу возможных событий относятся все подмножества множества элементарных событий. Например, при броске «выпало 1 или 2», «выпало 3» и т. д.

Невозможное событие (O) определяется как событие, не входящее в класс возможных. В нашем случае это, например, «не выпало ничего» или «на кубике A выпало число 7». Вероятность невозможного события равна p (O) = 0.

Достоверное событие (I): случилось хотя бы одно событие из класса возможных. В нашем случае достоверно то, что на каждом из кубиков A и B выпадет любое число от 1 до 6. Вероятность достоверного события равна p (I) = 1.

Событие, противоположное событию A, обозначается как и состоит в том, что в результате испытания A не произошло.

Сумма вероятностей события и его отрицания есть достоверное событие, то есть .

Несовместными называются события, которые не могут произойти одновременно. Например, события A1 и A2 являются несовместными: на кубике A не могут одновременно выпасть 1 и 2.

Суммой событий A и B называется событие, при котором произошло или A, или B, обозначается оно A + B. Например, A1 + A5 означает, что на кубике A выпало или 1, или 5. Можно доказать, что вероятности несовместных событий складываются, то есть, если бросать только кубик A, то p (A1 + A5) = p (A1) + p (A5) = 1/6 + 1/6 = 1/3.

Если бросать одновременно два кубика A и B, то событием будет пара чисел (a, b), выпавших на кубиках A и B соответственно. Обозначим это событие AaBb. Например, A1B5означает, что мы бросили два кубика одновременно, на кубике A выпало 1, а на B выпало 5.

Произведением событий A и B называется событие, при котором произошло и A, и B, обозначается оно AB.

Независимыми называются события A и B, если вероятность события A не зависит от того, наступило событие B или нет. Например, при броске двух кубиков A1 и B5 – независимые события. Вероятность произведения независимых событий равна произведению соответствующих вероятностей. Вообще, равенство является определением независимых событий.

Если вероятность наступления события A зависит от того, наступило событие B или нет, события называют зависимыми и вводят понятие условной вероятности. Условной вероятностью события A при условии того, что произошло событие B, называют величину .

*Пример 1*. К каким классам событий (возможное, невозможное, достоверное) относятся: а) расстояние между двумя произвольными городами меньше, чем 50 тысяч километров; б) наугад выбранное слово русского языка заканчивается буквами «нзо»; в) Вася выиграет в лотерее?

*Решение*. Первое из событий достоверное, а второе – невозможное. Третье событие может произойти, а может не произойти – оно является возможным, но не достоверным.

*Пример 2*. Укажите события, противоположные данным: а) на кубике выпало 1; б) Света получила на экзамене «5»; в) после ночи наступает утро?

*Решение*. а) На кубике не выпало 1; б) Света не получила на экзамене «5» (в том случае, если Света сдавала экзамен, то можно утверждать, что Света получила какую-то другую оценку); в) после ночи не наступает утро. Заметим, что событие, противоположное событию в) является невозможным (во всяком случае, в нашей обыденной жизни).

*Пример 3*. Совместны ли события: а) на первом кубике выпало 1, а на втором – 2; б) Юра пошёл в школу, а завтра будет дождь; в) Иванов в настоящее время является президентом страны, и Петров является президентом той же страны.

*Решение*. Пара событий из примера а) совместна, так как может произойти одновременно. Точно так же совместна и пара событий б). Пара событий в) несовместна, так как не может произойти одновременно.

*Пример*4. Уточним понятие независимых событий. Будем бросать две монеты и обозначим как событие A тот факт, что первая монета упадет гербом, событие B – вторая монета упадет гербом, событие C – на одной (и только на одной) монете выпадет герб. (Пример взят из книги Г. Секея «Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике».) Тогда события A, B, C попарно независимы, но два из них полностью определяют третье. Действительно, A и B независимы, так как результаты второго броска никак не зависят от первого броска, A и C (а также B и C) могут показаться зависимыми, но перебором вариантов можно получить, что p (AC) = 1/4 = p(A) p(C), значит, они по определению независимые. С другой стороны, легко убедиться, что любые два события однозначно определяют третье. На этом примере хорошо видно, что события могут быть попарно независимы, но зависимы в совокупности.

Теперь, ознакомившись с языком теории вероятностей, мы можем дать более строгое определение вероятности и выписать основные её свойства.

Вероятностью события p(A) называется некоторая действительная функция, определённая на классе возможных событий E и удовлетворяющая следующим трём аксиомам, сформулированным А. Н. Колмогоровым.

*Аксиома неотрицательности*. Для любого A из E вероятность p (A) ≥ 0.

*Аксиома нормированности*. Вероятность достоверного события p (I) = 1.

*Аксиома аддитивности*. Для любой (конечной или бесконечной) последовательности попарно несовместных событий A, B, C… вероятность их суммыp (A + B + C + …) = p (A) + p (B) + p (C) + …

Из перечисленных аксиом можно вывести следующие свойства вероятностей.

Для любого A из E верно: 1 ≥ p (A) ≥ 0. В частности, вероятность невозможного события p (O) = 0.

Если событие A влечёт за собой событие B, то p(A) < p(B).

*Пример 5*. Пассажир ждёт трамвая № 2 или № 7 возле остановки, на которой останавливаются трамваи № 2, № 5, № 7 и № 24. Считая, что трамваи всех маршрутов появляются случайным образом (не по расписанию) одинаково часто, найдите вероятность того, что первый подошедший к остановке трамвай будет нужного пассажиру маршрута.

*Решение*. Ясно, что вероятность того, что первым подойдёт трамвай № 2, равна . Такова же вероятность, что первым подойдёт трамвай № 7. Искомая вероятность, следовательно, равна . Ответ: .

Пример 6 (Задача Пункаре). В игорном клубе половина игроков честные, половина – шулеры. Вероятность вытащить из колоды короля равна 1/8. Для шулера эта вероятность равна 1. Сидящий перед вами игрок вытаскивает из колоды короля с первого раза. С какой вероятностью перед вами шулер?

*Решение*. Пусть событие A заключается в том, что из колоды вытянут король, B – в том, что игрок шулер. Тогда событие заключается в том, что игрок честный, и . Если взять первого попавшегося игрока, то он вытянет короля с вероятностью . Обозначим через X событие, заключающееся в том, что игрок, вытянувший короля, – шулер. Тогда .

Пуанкаре комментирует задачу словами, что, к счастью, обычно шулеров гораздо меньше, чем честных игроков.

Понятие «условная вероятность» требует введения четвёртой, последней аксиомы вероятностей:

Аксиома умножения вероятностей. Вероятность произведения событий p(AB) = p (B\A) p(A).

## Урок 13. Вероятность и статистическая частота наступления события

Классическое определение вероятности не является пригодным для изучения произвольных случайных событий. Так, оно неприемлемо, если результаты испытания не равновозможные.

Во многих случаях более удобным оказывается статистическое определение вероятности, которое связано с понятием относительной частоты появления события в опытах. Относительная частота (частость) появления события – это отношение числа появлений события в серии опытов к числу испытаний.

Относительная частота вычисляется по формуле:

Результаты многочисленных опытов и наблюдений помогают заключить: при проведении серий из испытаний, когда число сравнительно мало, относительная частота принимает значения, которые могут сильно отличаться друг от друга. При однотипных массовых испытаниях во многих случаях наблюдается устойчивость относительной частоты события, т.е. с увеличением числа испытаний в сериях относительная частота колеблется около некоторого постоянного числа , причем эти отклонения тем меньше, чем дольше произведено испытаний, если не учитывать отдельные неудачные испытания (выбросы).

Вероятностью события в статистическом смысле называется число , относительно которого стабилизируется (устанавливается) относительная частота при неограниченном увеличении числа опытов.

Под вероятностью события в статистическом смысле понимается почти достоверный предел его относительной частоты при неограниченно растущем числе испытаний. Таким образом, почти достоверно, что относительная частота события приближенно совпадает с его статистической вероятностью, если число испытаний достаточно велико. Поэтому, в практических задачах за вероятность события принимается относительная частота при достаточно большом числе испытаний.

Легко убедиться, что свойства вероятности, вытекающие из классического определения вероятности, сохраняются и при статистическом определении вероятности.

Если вероятность некоторого события близка к нулю, то, в соответствии со сказанным следует, что при единичном испытании в подавляющем большинстве случаев такое событие не наступит. Естественно, наступает вопрос: насколько малой должна быть вероятность, чтобы можно было считать невозможным наступление некоторого события в единичном испытании? Ответ на него не однозначен и зависит от тех потерь, которые будут иметь место, если это событие все-таки произойдет. Достаточно малую вероятность, при которой наступление события можно считать практически невозможным, называют уровнем значимости. На практике уровень значимости обычно принимают равным 0,05 (пятипроцентный уровень) или 0,01 (однопроцентный уровень).

При широких предположениях доказывается, что вероятности события в классическом и статистическом смыслах совпадают.

Рассмотрим случайный эксперимент, заключающийся в том, что подбрасывается игральная кость, сделанная из неоднородного материала. Ее центр тяжести не находится в геометрическом центре. В этом случае мы не можем считать исходы (выпадение единицы, двойки и т.д.) равновероятными. Из физики известно, что кость более часто будет падать на ту грань, которая ближе к центру тяжести. Как определить вероятность выпадения, например, трех очков? Единственное, что можно сделать, это подбросить эту кость n раз (где n-достаточно большое число, скажем n=1000 или n=5000), подсчитать число выпадений трех очков n3 и считать вероятность исхода, заключающегося в выпадении трех очков, равной n3/n – относительной частоте выпадения трех очков. Аналогичным образом можно определить вероятности остальных элементарных исходов – единицы, двойки, четверки и т.д. Теоретически такой образ действий можно оправдать, если ввести статистическое определение вероятности.

Вероятность определяется как предел относительной частоты появления исхода в процессе неограниченного увеличения числа случайных экспериментов n, то есть

 ,

Так как здесь не приводится никаких доказательств, мы можем только надеяться, что предел в последней формуле существует, обосновывая надежду жизненным опытом и интуицией.

В практике очень часто возникают задачи, в которых какой-либо другой способ определения вероятности события, кроме статистического определения, найти невозможно или крайне трудно.

# Раздел II. Основные понятия математической статистики

## Урок 14. Случайные величины и их природа

Уже в первой части приводились события, состоящие в появлении того или иного числа. Например, при бросании игральной кости могли появиться числа 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Наперед определить число выпавших очков невозможно, поскольку оно зависит от многих случайных причин, которые полностью не могут быть учтены. В этом смысле число очков есть величина случайная; числа 1, 2, 3, 4, 5 и 6 есть возможные значения этой величины.

Случайной называют величину, которая в результате испытания примет одно и только одно возможное значение, наперед не известное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены.

Пример 1. Число родившихся мальчиков среди ста новорожденных есть случайная величина, которая имеет следующие возможные значения: 0, 1, 2, ..., 100.

Пример 2. Расстояние, которое пролетит снаряд при выстреле из орудия, есть случайная величина. Действительно, расстояние зависит не только от установки прицела, но и от многих других причин (силы и направления ветра, температуры и т. д.), которые не могут быть полностью учтены. Возможные значения этой величины принадлежат некоторому промежутку .

Будем далее обозначать случайные величины прописными буквами , а их возможные значения — соответствующими строчными буквами . Например, если случайная величина X имеет три возможных значения, то они будут обозначены так: .

Вернемся к примерам, приведенным выше. В первом из них случайная величина X могла принять одно из следующих возможных значений: 0, 1, 2, . . ., 100.

Эти значения отделены одно от другого промежутками, в которых нет возможных значений X. Таким образом, в этом примере случайная величина принимает отдельные, изолированные возможные значения. Во втором примере случайная величина могла принять любое из значений промежутка .. Здесь нельзя отделить одно возможное значение от другого промежутком, не содержащим возможных значений случайной величины. Уже из сказанного можно заключить о целесообразности различать случайные величины, принимающие лишь отдельные, изолированные значения, и случайные величины, возможные значения которых сплошь заполняют некоторый промежуток.

Дискретной (прерывной) называют случайную величину, которая принимает отдельные, изолированные возможные значения с определенными вероятностями. Число возможных значений дискретной случайной величины может быть конечным или бесконечным. Непрерывной называют случайную величину, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка. Очевидно, число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно.

Замечание. Настоящее определение непрерывной случайной величины не является точным.

## Урок 15-16. Законы распределения случайной величины

На первый взгляд может показаться, что для задания дискретной случайной величины достаточно перечислить все ее возможные значения. В действительности это не так: случайные величины могут иметь одинаковые перечни возможных значений, а вероятности их — различные. Поэтому для задания дискретной случайной величины недостаточно перечислить все возможные ее значения, нужно еще указать их вероятности.

Законом распределения дискретной случайной величины называют соответствие между возможными значениями и их вероятностями; его можно задать таблично, аналитически (в виде формулы) и графически.

При табличном задании закона распределения дискретной случайной величины первая строка таблицы содержит возможные значения, а вторая — их вероятности:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | … |  |
|  |  |  | … |  |

Приняв во внимание, что в одном испытании случайная величина принимает одно и только одно возможное значение, заключаем, что события образуют полную группу; следовательно, сумма вероятностей этих событий, т. е. сумма вероятностей второй строки таблицы, равна единице:

Если множество возможных значений X бесконечно (счетно), то ряд сходится и его сумма равна единице.

*Пример*. В денежной лотерее выпущено 100 билетов. Разыгрывается один выигрыш в 50 руб. и десять выигрышей по 1 руб. Найти закон распределения случайной величины X — стоимости возможного выигрыша для владельца одного лотерейного билета.

*Решение*. Напишем возможные значения . Вероятности этих возможных значений таковы: . Напишем искомый закон распределения:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  | 0.89 |

Для наглядности закон распределения дискретной случайной величины можно изобразить и графически, для чего в прямоугольной системе координат строят точки , а затем соединяют их отрезками прямых. Полученную фигуру называют многоугольником распределения.

Биномиальное распределение Пусть производится независимых испытаний, в каждом из которых событие А может появиться либо не появиться. Вероятность наступления события во всех испытаниях постоянна и равна (следовательно, вероятность непоявления ). Рассмотрим в качестве дискретной случайной величины число появлений события в этих испытаниях. Поставим перед собой задачу: найти закон распределения величины . Для ее решения требуется определить возможные значения и их вероятности. Очевидно, событие в испытаниях может либо не появиться, либо появиться 1 раз, либо 2 раза, ..., либо раз. Таким образом, возможные значения таковы: . Остается найти вероятности этих возможных значений, для чего достаточно воспользоваться формулой Бернулли: . Формула (\*) и является аналитическим выражением искомого закона распределения.

Биномиальным называют распределение вероятностей, определяемое формулой Бернулли. Закон назван «биномиальным» потому, что правую часть равенства (\*) можно рассматривать как общий член разложения бинома Ньютона: .

Таким образом, первый член разложения определяет вероятность наступления рассматриваемого события раз в независимых испытаниях; второй член определяет вероятность наступления события раз; ...; последний член определяет вероятность того, что событие не появится ни разу. Напишем биномиальный закон в виде таблицы:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | … |  | … | 0 |
|  |  |  | … |  | … |  |

*Пример*. Монета брошена 2 раза. Написать в виде таблицы закон распределения случайной величины X — числа выпадений «герба».

*Решение*. Вероятность появления «герба» в каждом бросании монеты , следовательно, вероятность непоявления «герба» . При двух бросаниях монеты «герб» может появиться либо 2 раза, либо 1 раз, либо совсем не появиться. Таким образом, возможные значения таковы: . Найдем вероятности этих возможных значений по формуле Бернулли:



Напишем искомый закон распределения:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  | 0.25 |

Распределение Пуассона. Пусть производится независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события равна . Для определения вероятности появлений события в этих испытаниях используют формулу Бернулли. Если же велико, то пользуются асимптотической формулой Лапласа. Однако эта формула непригодна, если вероятность события мала . В этих случаях ( велико, мало) прибегают к асимптотической формуле Пуассона. Итак, поставим перед собой задачу найти вероятность того, что при очень большом числе испытаний, в каждом из которых вероятность события очень мала, событие наступит ровно k раз. Сделаем важное допущение: произведение сохраняет постоянное значение, а именно . Это означает, что среднее число появлений события в различных сериях испытаний, т. е. при различных значениях , остается неизменным. Воспользуемся формулой Бернулли для вычисления интересующей нас вероятности:

Так как , то . Следовательно,

Приняв во внимание, что имеет очень большое значение, вместо найдем . При этом будет найдено лишь приближенное значение отыскиваемой вероятности: хотя и велико, но конечно, а при отыскании предела мы устремим к бесконечности. Заметим, что, поскольку произведение сохраняет постоянное значение, то при вероятность . Итак,

Таким образом (для простоты записи знак приближенного равенства опущен), .

Эта формула выражает закон распределения Пуассона вероятностей массовых ( велико) и редких ( мало) событий.

Замечание. Имеются специальные таблицы, пользуясь которыми можно найти , зная .

*Пример*. Завод отправил на базу 5000 доброкачественных изделий. Вероятность того, что в пути изделие повредится, равно 0,0002. Найти вероятность того, что на базу прибудут 3 негодных изделия.

*Решение*. По условию, Найдем: . По формуле Пуассона искомая вероятность приближенно равна

Геометрическое распределение. Пусть производятся независимые испытания, в каждом из которых вероятность появления события равна и, следовательно, вероятность его непоявления . Испытания заканчиваются, как только появится событие . Таким образом, если событие А появилось в -м испытании, то в предшествующих испытаниях оно не появлялось.

Обозначим через дискретную случайную величину — число испытаний, которые нужно провести до первого появления события . Очевидно, возможными значениями являются натуральные числа: . Пусть в первых испытаниях событие не наступило, а в k-м испытании появилось. Вероятность этого «сложного события», по теореме умножения вероятностей независимых событий,

Полагая в формуле (\*), получим геометрическую прогрессию с первым членом и знаменателем .

По этой причине распределение (\*) называют геометрическим.

*Пример*. Из орудия производится стрельба по цели до первого попадания. Вероятность попадания в цель р = 0,6. Найти вероятность того, что попадание произойдет при третьем выстреле.

*Решение*. По условию, . Искомая вероятность по формуле (\*) .

Гипергеометрическое распределение. Прежде чем дать определение гипергеометрического распределения, рассмотрим задачу. Пусть в партии из изделий имеется стандартных (). Из партии случайно отбирают изделий (каждое изделие может быть извлечено с одинаковой вероятностью), причем отобранное изделие перед отбором следующего *не возвращается* в партию (поэтому формула Бернулли здесь неприменима). Обозначим через случайную величину — число стандартных изделий среди отобранных. Очевидно, возможные значения таковы: Найдем вероятность того, что , т. е. что среди отобранных изделий ровно стандартных. Используем для этого классическое определение вероятности.

Общее число возможных элементарных исходов испытания равно числу способов, которыми можно извлечь изделий из изделий, т. е. числу сочетаний . Найдем число исходов, благоприятствующих событию (среди взятых изделий ровно стандартных); стандартных изделий можно извлечь из стандартных изделий способами; при этом остальные изделий должны быть нестандартными; взять же нестандартных изделий из нестандартных изделий можно способами. Следовательно, число благоприятствующих исходов равно . Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию , к числу всех элементарных исходов

Формула (\*) определяет распределение вероятностей, которое называют гипергеометрическим. Учитывая, что — случайная величина, заключаем, что гипергеометрическое распределение определяется тремя параметрами: .

Заметим, что если n значительно меньше (практически если ), то гипергеометрическое распределение дает вероятности, близкие к вероятностям, найденным по биномиальному закону.

*Пример*. Среди 50 изделий 20 окрашенных. Найти вероятность того, что среди наудачу извлеченных 5 изделий окажется ровно 3 окрашенных.

Решение. По условию, . Искомая вероятность

Задачи:





## Урок 17. Математическое ожидание и его свойства.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называют сумму произведений всех ее возможных значений на их вероятности.

Пусть случайная величина может принимать только значения, вероятности которых соответственно равны . Тогда математическое ожидание случайной величины определяется равенством .

Если дискретная случайная величина X принимает счетное множество возможных значений, то , причем математическое ожидание существует, если ряд в правой части равенства сходится абсолютно.

Замечание. Из определения следует, что математическое ожидание дискретной случайной величины есть неслучайная (постоянная) величина. Рекомендуем запомнить это утверждение, так как далее оно используется многократно.

*Пример 1*. Найти математическое ожидание случайной величины , зная закон ее распределения:

*Решени*е. Искомое математическое ожидание равно сумме произведений всех возможных значений случайной величины на их вероятности:

Свойства математического ожидания

*Свойство 1*. Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной: .

Доказательство. Будем рассматривать постоянную С как дискретную случайную величину, которая имеет одно возможное значение С и принимает его с вероятностью р = 1. Следовательно,

*Замечание 1*. Определим произведение постоянной величины С на дискретную случайную величину X как дискретную случайную СХ, возможные значения которой равны произведениям постоянной С на возможные значения X; вероятности возможных значений СХ равны вероятностям соответствующих возможных значений X.

*Свойство 2*. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания: .

Доказательство. Пусть случайная величина X задана законом распределения вероятностей:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | … |  |
|  |  |  | … |  |

Учитывая замечание 1, напишем закон распределения случайной величины СХ:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | … |  |
|  |  |  | … |  |

Математическое ожидание случайной величины СХ:

*Замечание 2*. Прежде чем перейти к следующему свойству, укажем, что две случайные величины называют независимыми, если закон распределения одной из них не зависит от того, какие возможные значения приняла другая величина. В противном случае случайные величины зависимы. Несколько случайных величин называют взаимно независимыми, если законы распределения любого числа из них не зависят от того, какие возможные значения приняли остальные величины.

*Замечание 3*. Определим произведение независимых случайных величин X и Y как случайную величину XY, возможные значения которой равны произведениям каждого возможного значения X на каждое возможное значение Y; вероятности возможных значений произведения XY равны произведениям вероятностей возможных значений сомножителей.

*Свойство 3*. Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий:

Доказательство аналогично первым двум.

*Пример 1*. Независимые случайные величины X и Y заданы следующими законами распределения:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  | Y |  |  |
|  |  | 0.1 | 0.3 |  |  |  |

Найти математическое ожидание случайной величины XY.

*Решение*. Найдем математические ожидания каждой из данных величин:

Случайные величины X и Y независимые, поэтому искомое математическое ожидание .

*Замечание 4*. Определим сумму случайных величин X и Y как случайную величину X+Y, возможные значения которой равны суммам каждого возможного значения X с каждым возможным значением Y; вероятности возможных значений X+Y для независимых величин X и Y равны произведениям вероятностей слагаемых; для зависимых величин — произведениям вероятности одного слагаемого на условную вероятность второго.

*Свойство 4*. Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых: .

*Пример 2*. Производится 3 выстрела с вероятностями попадания в цель, равными Найти математическое ожидание общего числа попаданий.

*Решение*. Число попаданий при первом выстреле есть случайная величина ,которая может принимать только два значения: 1 (попадание) с вероятностью и 0 (промах) с вероятностью . Математическое ожидание числа попаданий при первом выстреле равно вероятности попадания, т. е. . Аналогично найдем математические ожидания числа попаданий при втором и третьем выстрелах: ,

Общее число попаданий есть также случайная величина, состоящая из суммы попаданий в каждом из трех выстрелов: . Искомое математическое ожидание находим по теореме о математическом, ожидании суммы:

*Пример 3*. Найти математическое ожидание суммы числа очков, которые могут выпасть при бросании двух игральных костей.

*Решение*. Обозначим число очков, которое может выпасть на первой кости, через X и на второй — через Y. Возможные значения этих величин одинаковы и равны 1, 2, 3, 4, 5 и 6, причем вероятность каждого из этих значений равна 1/6. Найдем математическое ожидание числа очков, которые могут выпасть на первой кости: . Очевидно, что и М(Y) = 7/2. Искомое математическое ожидание .

Математическое ожидание числа появлений события в независимых испытаниях. Пусть производится независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события А постоянна и равна р. Чему равно среднее число появлений события А в этих испытаниях? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема. Математическое ожидание М (X) числа появлений события А в независимых испытаниях равно произведению числа испытаний на вероятность появления события в каждом испытании: .

## Урок 18. Дисперсия и среднеквадратичное отклонение.

На практике часто требуется оценить рассеяние возможных значений случайной величины вокруг ее среднего значения. Например, в артиллерии важно знать, насколько кучно лягут снаряды вблизи цели, которая должна быть поражена.

Дисперсией (рассеянием) дискретной случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания .

Пусть случайная величина задана законом распределения

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | … |  |
|  |  |  | … |  |

Тогда квадрат отклонения имеет следующий закон распределения:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | … |  |
|  |  |  | … |  |

По определению дисперсии,

Таким образом, для того чтобы найти дисперсию, достаточно вычислить сумму произведений возможных значений квадрата отклонения на их вероятности. Для вычисления дисперсии часто бывает удобно пользоваться следующей теоремой.

Теорема. Дисперсия равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины X и квадратом ее математического ожидания:

Доказательство. Математическое ожидание М (X) есть постоянная величина, следовательно, и есть также постоянные величины. Приняв это во внимание и пользуясь свойствами математического ожидания (постоянный множитель можно вынести за знак математического ожидания, математическое ожидание суммы равно сумме математических ожиданий слагаемых), упростим формулу, выражающую определение дисперсии:

Пример 1. Найти дисперсию случайной величины X, которая задана следующим законом распределения:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| X | 2 | 3 | 5 |
| p | 0.1 | 0.6 | 0.3 |

Решение. Найдем математическое ожидание М(X):

.

Напишем закон распределения случайной величины :

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 4 | 9 | 25 |
| p | 0.1 | 0.6 | 0.3 |

Найдем математические ожидания :

.

Искомая дисперсия

Замечание. Казалось бы, если X и Y имеют одинаковые возможные значения и одно и то же математическое ожидание, то и дисперсии этих величин равны (ведь возможные значения обеих величин одинаково рассеяны вокруг своих математических ожиданий!). Однако в общем случае это не так. Дело в том, что одинаковые возможные значения рассматриваемых величин имеют, вообще говоря, различные вероятности, а величина дисперсии определяется не только самими возможными значениями, но и их вероятностями. Например, если вероятности «далеких» от математического ожидания возможных значений X больше, чем вероятности этих же значений Y, и вероятности «близких» значений X меньше, чем вероятности тех же значений Y, то, очевидно, дисперсия X больше дисперсии Y.

Приведем иллюстрирующий пример. Сравнить дисперсии случайных величин, заданных законами распределения:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| X | -1 | 1 | 2 | 3 | Y | -1 | 1 | 2 | 3 |
| p | 0.48 | 0.01 | 0.09 | 0.42 | p | 0.19 | 0.51 | 0.25 | 0.05 |

Решение. Легко убедиться, что

Таким образом, возможные значения и математические ожидания X и Y одинаковы, а дисперсии различны, причем D(X)>D(T). Этот результат можно было предвидеть без вычислений, глядя лишь на законы распределений.

Свойства дисперсии (приводим без доказательства).

Свойство 1. Дисперсия постоянной величины С равна нулю; .

Свойство 2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат:

Свойство 3. Дисперсия суммы/разности двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин: =D(X)+D(Y)

Дисперсия числа появлений события в независимых испытаниях. Пусть производится п независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события А постоянна. Чему равна дисперсия числа появлений события в этих испытаниях? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема. Дисперсия числа появлений события А в п независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность р появления события постоянна, равна произведению числа испытаний на вероятности появления и непоявления события в одном испытании: .

Для оценки рассеяния возможных значений случайной величины вокруг ее среднего значения кроме дисперсии служат и некоторые другие характеристики. К их числу относится среднее квадратическое отклонение.

Средним квадратическим отклонением случайной величины X называют квадратный корень из дисперсии:

Легко показать, что дисперсия имеет размерность, равную квадрату размерности случайной величины. Так как среднее квадратическое отклонение равно квадратному корню из дисперсии, то размерность совпадает с размерностью X. Поэтому в тех случаях, когда желательно, чтобы оценка рассеяния имела размерность случайной величины, вычисляют среднее квадратическое отклонение, а не дисперсию. Например, если X выражается в линейных метрах, то будет выражаться также в линейных метрах, a D (X) — в квадратных метрах.

*Пример*. Случайная величина X задана законом распределения

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| X | 2 | 3 | 10 |
| p | 0.1 | 0.4 | 0.5 |

Найти среднее квадратическое отклонение .

Решение. Найдем математическое ожидание :

Найдем математическое ожидание :

Найдем дисперсию:

Искомое среднее квадратическое отклонение

## Урок 19-20. Выборки

Пусть требуется изучить совокупность однородных объектов относительно некоторого качественного или количественного признака, характеризующего эти объекты. Например, если имеется партия деталей, то качественным признаком может служить стандартность детали, а количественным — контролируемый размер детали. Иногда проводят сплошное обследование, т.е. обследуют каждый из объектов совокупности относительно признака, которым интересуются. На практике, однако, сплошное обследование применяют сравнительно редко. Например, если совокупность содержит очень большое число объектов, то провести сплошное обследование физически невозможно. Если обследование объекта связано с его уничтожением или требует больших материальных затрат, то проводить сплошное обследование практически не имеет смысла. В таких случаях случайно отбирают из всей совокупности ограниченное число объектов и подвергают их изучению.

Выборочной совокупностью или просто выборкой называют совокупность случайно отобранных объектов.

Генеральной совокупностью называют совокупность объектов, из которых производится выборка.

Объемом совокупности (выборочной или генеральной) называют число объектов этой совокупности. Например, если из 1000 деталей отобрано для обследования 100 деталей, то объем генеральной совокупности N = 1000, а объем выборки n =100.

Замечание. Часто генеральная совокупность содержит конечное число объектов. Однако, если это число достаточно велико, то иногда в целях упрощения вычислений, или для облегчения теоретических выводов, допускают, что генеральная совокупность состоит из бесчисленного множества объектов. Такое допущение оправдывается тем, что увеличение объема генеральной совокупности (достаточно большого объема) практически не сказывается на результатах обработки данных выборки.

Повторная и бесповторная выборки. Репрезентативная выборка. При составлении выборки можно поступать двумя способами: после того как объект отобран и над ним произведено наблюдение, он может быть возвращен либо не возвращен в генеральную совокупность. В соответствии со сказанным выборки подразделяют на повторные и бесповторные выборки.

Повторной называют выборку, при которой отобранный объект (перед отбором следующего) возвращается в генеральную совокупность.

Бесповторной называют выборку, при которой отобранный объект в генеральную совокупность не возвращается.

На практике обычно пользуются бесповторным случайным отбором. Для того, чтобы по данным выборки можно было достаточно уверенно судить об интересующем признаке генеральной совокупности, необходимо, чтобы объекты выборки правильно его представляли. Другими словами, выборка должна правильно представлять пропорции генеральной совокупности. Это требование коротко формулируют так: выборка должна быть репрезентативной (представительной).

В силу закона больших чисел можно утверждать, что выборка будет репрезентативной, если ее осуществить случайно: каждый объект выборки отобран случайно из генеральной совокупности, если все объекты имеют одинаковую вероятность попасть в выборку.

Если объем генеральной совокупности достаточно велик, а выборка составляет лишь незначительную часть этой совокупности, то различие между повторной и бесповторной выборками стирается; в предельном случае, когда рассматривается бесконечная генеральная совокупность, а выборка имеет конечный объем, это различие исчезает.

На практике применяются различные способы отбора. Принципиально эти способы можно подразделить на два вида:

1. Отбор, не требующий расчленения генеральной совокупности на части. Сюда относятся: а) простой случайный бесповторный отбор; б) простой случайный повторный отбор.
2. Отбор, при котором генеральная совокупность разбивается на части. Сюда относятся: а) типический отбор; б) механический отбор; в) серийный отбор.

Простым случайным называют такой отбор, при котором объекты извлекают по одному из всей генеральной совокупности. Осуществить простой отбор можно различными способами. Например, для извлечения объектов из генеральной совокупности объема поступают так: выписывают номера от 1 до на карточках, которые тщательно перемешивают, и наугад вынимают одну карточку; объект, имеющий одинаковый номер с извлеченной карточкой, подвергают обследованию; затем карточку возвращают в пачку и процесс повторяют, т. е. карточки перемешивают, наугад вынимают одну из них и т. д. Так поступают раз; в итоге получают простую случайную повторную выборку объема . Если извлеченные карточки не возвращать в пачку, то выборка является простой случайной бесповторной.

При большом объеме генеральной совокупности описанный процесс оказывается очень трудоемким. В этом случае пользуются готовыми таблицами «случайных чисел», в которых числа расположены в случайном порядке. Для того чтобы отобрать, например, 50 объектов из пронумерованной генеральной совокупности, открывают любую страницу таблицы случайных чисел и выписывают подряд 50 чисел; в выборку попадают те объекты, номера которых совпадают с выписанными случайными числами.

Если бы оказалось, что случайное число таблицы превышает число N, то такое случайное число пропускают. При осуществлении бесповторной выборки случайные числа таблицы, уже встречавшиеся ранее, следует также пропустить.

Типическим называют отбор, при котором объекты отбираются не из всей генеральной совокупности, а из каждой ее «типической» части. Например, если детали изготовляют на нескольких станках, то отбор производят не из всей совокупности деталей, произведенных всеми станками, а из продукции каждого станка в отдельности. Типическим отбором пользуются тогда, когда обследуемый признак заметно колеблется в различных типических частях генеральной совокупности. Например, если продукция изготовляется на нескольких машинах, среди которых есть более и менее изношенные, то здесь типический отбор целесообразен.

Механическим называют отбор, при котором генеральную совокупность «механически» делят на столько групп, сколько объектов должно войти в выборку, а из каждой группы отбирают один объект. Например, если нужно отобрать 20% изготовленных станком деталей, то отбирают каждую пятую деталь; если требуется отобрать 5% деталей, то отбирают каждую двадцатую деталь, и т. д.

Следует указать, что иногда механический отбор может не обеспечить репрезентативности выборки. Например, если отбирают каждый двадцатый обтачиваемый валик, причем сразу же после отбора производят замену резца, то отобранными окажутся все валики, обточенные затупленными резцами. В таком случае следует устранить совпадение ритма отбора с ритмом замены резца, для чего надо отбирать, скажем, каждый десятый валик из двадцати обточенных.

Серийным называют отбор, при котором объекты отбирают из генеральной совокупности не по одному, а «сериями», которые подвергаются сплошному обследованию. Например, если изделия изготовляются большой группой станков-автоматов, то подвергают сплошному обследованию продукцию только нескольких станков. Серийным отбором пользуются тогда, когда обследуемый признак колеблется в различных сериях незначительно.

Подчеркнем, что на практике часто применяется комбинированный отбор, при котором сочетаются указанные выше способы. Например, иногда разбивают генеральную совокупность на серии одинакового объема, затем простым случайным отбором выбирают несколько серий и, наконец, из каждой серии простым случайным отбором извлекают отдельные объекты.

## Урок 21. Итоговое занятие

Подводятся итоги проделанной работы, защита рефератов, написанных учащимися в процессе изучения данного курса.

# Литература

1. Коваленко И.Н., Филиппова А.А. Теория вероятностей и математическая статистика. – М., 1973.
2. Пугачев В.С. Теория вероятностей и математическая статистика. – М., 1979.
3. Четыркин Е.М., Калахман И.Л. Вероятность и статистика. – М., 1982.
4. Мордкович А.Г., Семенов П.В. События. Вероятность. Статистика: Дополнительные материалы к курсу алгебры для 7 – 9 кл. – М.:Мнемозина, 2002. (к учебникам А.Г. Мордковича)
5. Ткачева М.В.,Федорова Н.Е. Алгебра, 7 – 9: Элементы статистики и вероятность. – М.: Просвещение, 2003. (к учебникам А.Ш. Алимова и др.)
6. Буннмович Е.А., Булычев В.А. Вероятность и статистика, 5 – 9 кл. – М.: Дрофа, 2002.
7. Мордкович А.Г., Семенов П.В. События, вероятности, статистическая обработка данных, - Математика (приложение к газете «Первое сентября»), №34, 35, 41, 43, 44, 48, 2002, №11, 17, 2003.